11.1 Қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешім. Бірінші ретті теңдеулер және оларды интегралдау әдістері. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.

11.1. Анықтама. Жалпы, дербес және ерекше шешім.

Анықтама:

1. Ізделінетін функцияны, оның туындылары мен дифференциалдарын және аргументтерін байланыстыратын теңдеуді дифференциалдық теңдеу деп айтамыз.
2. .Теңдеуге кіретін туындының не дифференциалдың ең жоғарғы ретін дифференциалдық теңдеудің реті деп атаймыз.
3. Егер функцияның өзін, туындысын және дифференциалын теңдеуге қойғанда тепе-теңдік шығатын болса, онда функцияны дифференциалдық теңдеудің шешімі деп айтамыз.
4. Тек қана бір айнымалыға (бірнеше айнымалыға) тәуелді дифференциалдық теңдеуді қарапайым (дербес туындылы) дифференциалдық теңдеулер деп айтамыз.

1 мысал.

а) $y'''(x) - xy^2(x) = 3$ - үшінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу;

б) $xdx - ydy = 0$ - бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу.

2- Мысал. Теңдеудің жалпы шешімін тап

$$y' = 2x \Rightarrow \int y'dx = \int 2xdx \Rightarrow$$

$$y = x^2 + C \quad (1)$$

(1) шешімі кез келген С тұрақтысына байланысты, яғни, С-ның әртүрлі мәнінде әртүрлі шешім аламыз.Енді С тұрақтысын анықтау үшін қосымша бір шарт (бастапқы шарт) берелік: $y(1) = 2$.

Онда осы бастапқы шартты (1)-ге қойсақ: $2 = 1^2 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$ - дербес шешім.

11.2. Коши теоремасы. Жалпы және дербес шешім

$n-$ші ретті айқын дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады:

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; ...; y^{(n-1)}), \qquad (3)$$

ал айқын емес $n-$ші ретті дифференциалдық теңдеу: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Коши есебі. (3) дифференциалдық теңдеуінің, $x = x_0$ болғанда

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0 \quad (4)$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімдерін табыңыз.

Коши теоремасы. Егер қандай да бір тұйық облыста $f(x; y; y', ..., y^{(n-1)})$ функциясы барлық аргументі бойынша үзіліссіз болып және осы облыста оның дербес туындылары $f'_y, f'_{y'}, ..., f'_{y^{(n-1)}}$ табылса, онда (3) дифференциалдық теңдеуінің (4) бастапқы шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі болады, мұндағы $(x_0; y_0)$ нүктесі - осы облысқа тиісті нүкте.

Анықтама . Кез келген дифференциалданатын функция

$$y = \varphi(x; C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (5)$$

мұндағы $C_i, i = \overline{1,n}$ - кез келген тұрақтылар, (3) дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі деп аталады, егер:

а) ол $C_i,\ i = \overline{1,n}$ -дің кез келген тұрақты мәндерінде (3) дифференциалдық теңдеуінің шешімі болса,

б) Коши теоремасының шартын қанағаттандыратын осы облыстың кез келген бастапқы шарты үшін,

$$y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0) \qquad (6)$$

шешімі бастапқы шартты қанағаттандыратындай $C_i = C_i^0,\ i = \overline{1,n}$ тұрақтылары табылатын болса.

Дифференциал теңдеудің берілген облысындағы әрбір нүктесі үшін жалғыздық шарты орындалатын болса, онда (6) түріндегі шешім дербес шешім деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан, (6) – қисықтар жиынтығы (интегралдық қисықтар). Коши теоремасының шарты орындалды дегеніміз - облысқа тиісті кез келген (x_0, y_0) нүктесінен (4) шартын қанағаттандыратын тек бір ғана қисық өтеді деген сөз.

(1) теңдеуінің айқын емес түрде берілген жалпы (дербес) шешімі:

$$\Phi(x; y; C_1; C_2; ...; C_n) = 0 \quad \left[\Phi(x; y; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0)\right]$$

сәйкесінше дифференциалдық теңдеудің жалпы (дербес) интегралы деп аталады.
(3) теңдеуінің жалпы және дербес шешімінен басқа ерекше шешімдері болады.

Анықтама. C_i-ді $(i = \overline{1,n})$ қандай етіп таңдап алсақ та, жалпы шешімнен шықпайтын және шешімнің жалғыздық шарты бұзылатын нүктелерде орналасқан (облыстың шекарасында) шешімдерді ерекше шешімдер деп атаймыз.

Мысалдарда байқағанымыздай, теңдеуді шешу кезінде біз алғашқы функция табамыз. Сондықтан, дифференциалдық теңдеудің шешімін табу процессі теңдеуді интегралдау деп аталады.

11.3. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

y' бойынша шешілетін теңдеу:

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y), \quad y' = f(x;y) \qquad (7)$$

түрінде жазылады.

Бірінші ретті теңдеудің дифференциалдық пішіні мына түрде болады:

$$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0 \qquad (8)$$

2- е с к е р т у. Геометриялық тұрғыдан, (7) теңдеу әрбір $M(x;y)$ нүктесі үшін интегралдық қисыққа жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффицентінің мәнін береді, яғни, бағыттар өрісін береді.

Кей жағдайларда, x-ті y-ке қатысты функция ретінде қарастырсақ $\left(x' = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}\right)$, теңдеуді интегралдау жеңілденеді. Сондықтан да, ары қарай x пен y-ті тең құқылы айнымалылар деп есептейміз.

11.4 Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

Анықтама

$$M(x)\cdot N(y)dx + P(x)\cdot Q(y)dy = 0 \ ,$$

түріндегі, dx пен dy-тің алдындағы коэффиценттері тек x-ке тәуелді функция мен тек y-ке тәуелді функциялардың көбейтінділері болатын дифференциалдық теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп аталады.

$P(x) \neq 0$, $N(y) \neq 0$ деп есептеп, (1)-теңдеуінің екі жағын да $P(x)\cdot N(y)$ көбейтіндісіне бөліп, интегралдасақ:

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C \ .$$

Дифференциал теңдеудің жалпы шешімін алдық.

Е с к е р т у. $P(x) = 0$, $N(y) = 0$ жағдайлары бөлек зерттеледі. Егер дифференциал теңдеудің ерекше шешімдері бар болса, онда олар берілген алгебралық теңдеудің шешімдері болып табылады.